單元 3 數列與級數

國中複習

1. 數列

將一群數排成一列稱為數列，即 a_1，a_2，a_3，……，a_n，其中 a_1 為首項，a_n 為末項，此數列共有 n 項。

2. 等差數列

有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足

$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}$（通常令此差距為 d，稱為公差），

則稱數列為等差數列。

3. 等差數列的第 n 項

一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則此數列的第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

4. 等差中項

若 a，b，c 三數依序成等差數列，則 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

5. 級數

將一數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為級數，

即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

6. 等差級數

將一等差數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為等差級數，

即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

7. 等差級數的和

(1) 一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，公差為 d，則此等差級數和為

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]。$$

(2) 一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，末項為 a_n，則此等差級數和為

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)。$$

國中基礎能力檢定

1. 等差數列$\{a_n\}$如下：100，98，96，94，……，則此數列的第 36 項為______。

解

2. 等差數列$\{a_n\}$：-50，……，50，總共有 51 項，則此數列的公差為_____。

解

3. 等差數列$\{a_n\}$的第 3 項 $a_3=9$，第 9 項 $a_9=3$，則首項 $a_1=$______。

解

4. 如右圖，每一直行，每一橫列或任一對角線上的三數皆為等差數列，則 $b=$______。

解

a	b	c
d	9	e
3	f	-25

5. 由 1 到 100 的所有正整數的和 $1+2+3+\cdots\cdots+100=$________。

解

6. 等差數列$\{a_n\}$共有 10 項，第 2 項 $a_2=12$，第 9 項 $a_9=-2$，則此數列的所有項的和為______。

解

7. 將所有正整數分組如下：

第 1 組：(1，2)；第 2 組：(3，4)；第 3 組：(5，6，7，8)；……；

第 k 組：$(2^{k-1}+1，2^{k-1}+2，\cdots\cdots，2^k)$，其中 k 為大於 2 的正整數；……依此規律，

則第 6 組之中所有正整數的總和為________。

解

8. 等差數列$\{a_n\}$首項為-113，第 2 項為-105，則此數列自第______項開始為正數。

解

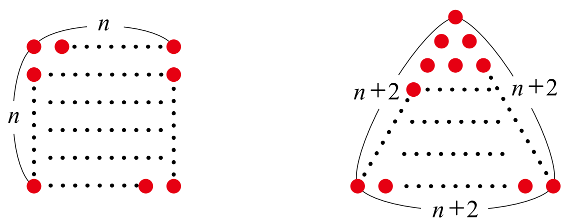
9. 有一直角三角形三邊長成等差數列，若此三角形周長為 24，則此三角形的面積為______。

解

10. 籃球場的看臺觀眾席 D 區有 15 排座位，此區每一排都比其前一排多 1 個座位，阿哲坐在第 6 排，發現此排共有 20 個座位，則觀眾席 D 區總共有______個座位。

解

11. 有大小相同的球若干個，已知全部的球剛好可以排成一個每邊有 n 個球的正方形。若將全部的球改排成一個每邊 $n+2$ 個球的正三角形，也剛好用完所有的球。則可知全部的球有多少個？



(A) 36 個　(B) 64 個　(C) 100 個　(D) 144 個。

答 ______。

解

12. 有一天大寶意外救了國王，國王很高興，答應給大寶一個請求。大寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 3 元，每天給的錢比前一天多 1 元，連續給 30 天。則大寶總共可以得到______元。

解

高中先修課程

銜接焦點 1　等比數列

有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$（通常令此比值為 r，稱為公比），則稱數列為等比數列。

說明：

(1) 等比數列首項 a_1，公比 r（其中 $a_1\neq 0$，$r\neq 0$），則此數列的前 n 項為
a_1，a_1r，a_1r^2，a_1r^3，……，a_1r^{n-1}。

(2) 首項 a_1，公比 r，則第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$。

例題 1

已知數列 $\{a_n\}$ 為一等比數列，且 $a_1=2$，$a_2=8$，則：

(1) 此數列的公比為_____。　(2) 第 6 項 $a_6=$________。

(3) 數字 512 是此數列的第_____項。

解

練習 1

已知數列 $\{a_n\}$ 為一等比數列，若 $a_3=20$，$a_4=10$，則：

(1) 此數列的公比為______。　(2) 此數列的首項為______。

(3) 第 8 項 $a_8=$______。　(4) $\dfrac{5}{256}$ 是此數列的第______項。

解

銜接焦點 2　等比級數

▒ 將一等比數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為等比級數，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

(1) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比 $r\neq 1$，則此等比級數和為

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}。$$

(2) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比為 $r=1$，則此等比級數和為 $S_n=na_1$。

說明：

(1) 公比 $r\neq 1$

$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$……………………①

$rS_n=\quad a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots\cdots\quad+a_1r^{n-1}+a_1r^n$……………………②

由①－②可得 $(1-r)S_n=a_1-a_1r^n \Rightarrow S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。

註：$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

(2) 公比 $r=1$，則 $S_n=a_1+a_1+a_1+\cdots\cdots+a_1=na_1$（每一項都是 a_1）。

例題 2

試求下列等比級數的和：

(1) $1+2+4+8+\cdots\cdots+128=$________。　(2) $2-4+8-16+\cdots\cdots+128=$________。

解

練習 2

試求下列等比級數的和：

(1) $1+3+9+27+\cdots\cdots+243=$________。　(2) $3-9+27-81+\cdots\cdots+243=$________。

解

銜接焦點 3　級數和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

▨ 級數和常以 Σ（唸 *sigma* 或 *summation*）來表示，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$。

說明：

(1) 數列的一般項為 a_k。

(2) k 之值由下標的 1 到上標 n，依序表出 a_1，a_2，a_3，⋯⋯，a_n，再相加起來。

例題 3

(1) 以 Σ 表示等差級數和 $1+2+3+\cdots\cdots+100=$ ______。

(2) 以 Σ 表示等差級數和 $1+3+5+7+\cdots\cdots+99=$ ______。

(3) 以 Σ 表示等比級數和 $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10}=$ ______。

解

練習 3

(1) 以 Σ 表示等差級數和 $2+4+6+\cdots\cdots+100=$ ______。

(2) 以 Σ 表示等比級數和 $3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{10}=$ ______。

解

先修銜接能力檢定

1. 下列哪些數列是等比數列？(多選)

(A) 1，1，1，1，1　(B) 1，-1，1，-1，1　(C) -1，-1，1，1，-1

(D) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{80}$　(E) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{25}$。

答 ______。

解

2. 已知 α，12，9 三數依序成等比數列，則 $\alpha=$______。

解

3. 設$\{a_n\}$是一個等比數列，且 $a_2=16$，$a_3=-32$，則：

(1) 公比 $r=$______。

(2) 首項 $a_1=$______。

(3) 數字-2048 是此數列的第______項。

解

4. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為 2，則其前 4 項的和為______。

解

5. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為 $-\frac{1}{2}$，則其前 4 項的和為________。

解

6. 以 Σ 表示級數和 $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots+(3^{10}+5\times10)=$ ________________。

解

7. 等比級數 $2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\frac{2}{81}-\frac{2}{243}$ 的和為________。

解

8. 有一天二寶意外救了國王，國王很高興，答應給二寶一個請求。二寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 4 元，每天給的錢是前一天的兩倍，連續給 30 天，則二寶總共可得到________________元。

解

綜合能力檢定

1. 已知數列$\{a_n\}$為一等差數列，若 $a_3=1$，$a_5=5$，則此數列的

⑴ 公差為______。　　⑵ 首項為______。

⑶ 第 8 項 $a_8=$______。　　⑷ 前 6 項的總和為______。

解

2. 已知數列$\{a_n\}$為一等比數列且公比大於 0，若 $a_3=20$，$a_5=5$，則此數列的

⑴ 公比為______。　　⑵ 首項為______。

⑶ 第 8 項 $a_8=$______。　　⑷ 前 6 項的總和為______。

解

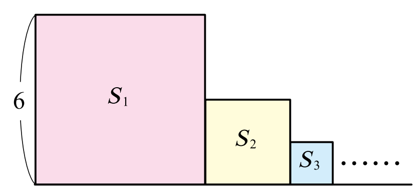
3. 級數和 $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)$ 之值為_______。

解

4. 某電影院共有 15 排座位，已知每一排均比前排多 2 個座位，若第 7 排有 30 個座位，則可知電影院總共有_______個座位。

解

5. 如右圖，有一邊長為 6 公分的正方形 S_1，若以 S_1 邊長的一半為邊長作一正方形 S_2，再以 S_2 邊長的一半為邊長再作一正方形 S_3，……，依此規律繼續操作，則 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 的面積總和為_________平方公分。



解